

INTRODUCTION À LA COMPLEXITÉ

Vendredi 1 avril

Option Informatique
Ecole Alsacienne

AVANT DE COMMENCER

- Prochaines séances
 - 8 avril : *Tris et complexité 1/2*
 - 15 avril : Bac blanc
 - 6 mai : Pont de l'Ascension ?
 - 13 mai : *Tris et complexité 2/2*
 - 20 mai : Booléens et portes logiques
 - 27 mai : Devoir sur table
 - 3 juin : dernière séance
- TD à rendre pour le 24 avril
 - *Détection et correction*
 - *Méthodes de chiffrement*

PLAN

1. Ordres de grandeur
2. Définitions et notations
3. Premiers exemples
4. Complexité et récursivité
5. Exercices

ORDRES DE GRANDEUR

ORDRES DE GRANDEUR

- *A combien estimez-vous les quantités suivantes ?*
 - Nombre de gènes de l'être humain : 30 000
 - Nombre de cheveux sur la tête : 125 000
 - Nombre de livres et d'imprimés à la BNF : 54 millions
 - Nombre d'être humains : 7,4 milliards
 - Nombre de neurones dans un cerveau humain : 10^{11}
 - Nombre de cellules dans le corps humain : 10^{14}
 - Nombre d'insectes sur Terre : 10^{18}
 - Nombre d'atomes dans le corps humain : 7×10^{27}
 - Nombre d'atomes constituant la Terre : 10^{50}
 - Nombre de particules dans l'Univers : 10^{80}
 - Nombre de parties possibles aux échecs : 10^{123}

ORDRES DE GRANDEUR

- *Quel est l'âge de l'univers ?*
 - Environ 15 milliards d'années
 - Soit environ 5×10^{17} secondes
- *Combien d'opérations élémentaires un ordinateur peut-il faire par seconde ?*
 - Les processeurs actuels font tous au moins 1 Ghz
 - Rappel : 1 Hz = "1 fois par seconde"
 - Donc quelques milliards d'opérations par seconde
- *Combien de temps faut-il à un ordinateur pour compter de 1 en 1 jusqu'à 10^{27} ?*
 - Deux fois l'âge de l'univers (10^{18} secondes)
 - Explication :
 - En une seconde, il compte de 1 à 10^9
 - En dix secondes, il compte de 1 à $10 \times 10^9 = 10^{10}$
 - En mille secondes, il compte de 1 à $1000 \times 10^9 = 10^{12}$
 - En 10^{18} secondes, il compte de 1 à $10^{18} \times 10^9 = 10^{27}$

COMPARAISONS ENTRE FONCTIONS

- *Lequel de ces nombres est le plus grand ?
(quand n prend des valeurs très élevées)*

- $1000 \times n$ ou n^2

- n ou $2 \times n$

- n ou n^2

- n^{10} ou 2^n

L'ÉNIGME DU NÉNUPHAR

- Le premier janvier, un étang contient un unique nénuphar.
- Chaque nuit, chaque nénuphar donne naissance à un nouveau nénuphar.
- Chaque nénuphar recouvre une petite surface du lac (toujours la même)



- **Question** : *Sachant que la moitié du lac est recouverte le 31 janvier, quand le lac entier sera-t-il entièrement recouvert ?*

LA FONCTION EXPONENTIELLE

- Notation : l'exponentielle de n se note e^n ou $\exp(n)$
- Informellement :
 - *"plus n est grand, plus e^n monte vite"*
 - *"plus n est grand, plus e^n est plus grand que e^{n-1} "*
- Propriétés mathématiques :
 - $\exp(n + m) = \exp(n) \times \exp(m)$
 - $\exp(0) = 1$
 - La dérivée de l'exponentielle est l'exponentielle : $\exp'(x) = \exp(x)$

LA FONCTION 2^n

- Lien avec les nénuphars : 2^n se comporte comme e^n

- Informellement :

- "plus n est grand, plus 2^n monte vite"
- "plus n est grand, plus 2^n est plus grand que 2^{n-1} "

- Propriétés mathématiques :

- $2^{n+m} = 2^n \times 2^m$
- $2^0 = 1$



- S'il s'est écoulé n jours depuis le premier janvier, l'étang contient 2^n nénuphars

LA FONCTION LOGARITHME

- On peut voir la fonction **logarithme** comme l'inverse de la fonction exponentielle :

$$\log(\exp(x)) = x = \exp(\log(x))$$

- On parle souvent du **logarithme en base 2**, qui est tel que :

$$\log_2(2^n) = n$$

- De façon analogue, le **logarithme en base 10** vérifie :

$$\log_{10}(10^n) = n$$

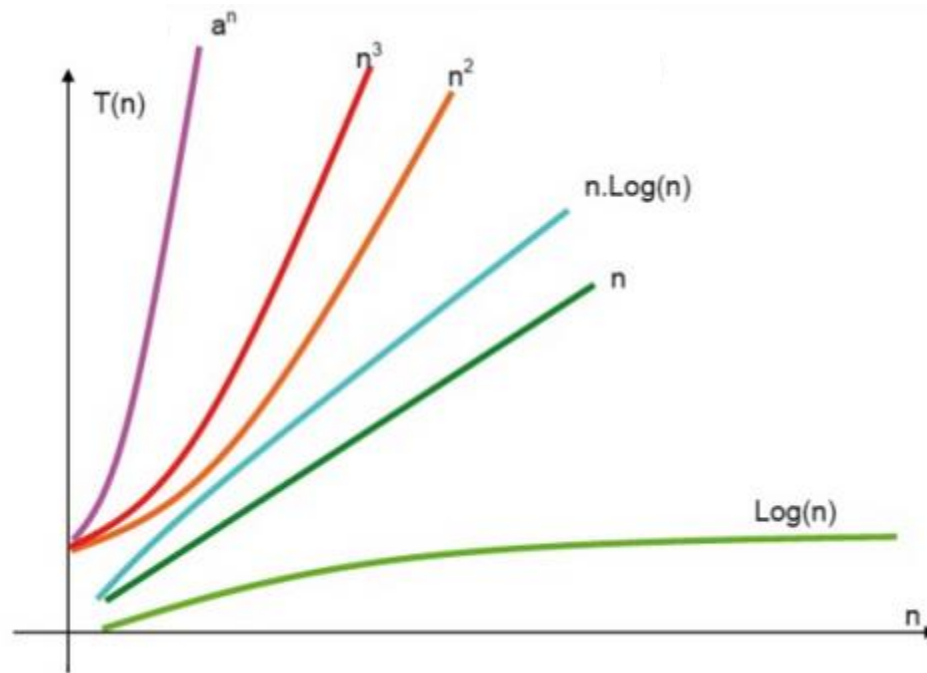
- « Le logarithme est aussi lent que l'exponentielle est rapide »

COMPARAISONS ENTRE FONCTIONS

n	n^2	n^3	n^{10}	2^n	$\log_{10}(n)$
1	1	1	1	2	0
2	4	8	1024	4	0,30103
3	9	27	59049	8	0,47712125
4	16	64	1048576	16	0,60205999
5	25	125	9765625	32	0,69897
10	100	1000	1E+10	1024	1
20	400	8000	1,024E+13	1048576	1,30103
50	2500	125000	9,7656E+16	1,1259E+15	1,69897
100	10000	1000000	1E+20	1,2677E+30	2
500	250000	125000000	9,7656E+26	3,273E+150	2,69897
1000	1000000	1000000000	1E+30	1,072E+301	3

Notation : $x\text{E}+k = x \times 10^k$

COMPARAISONS ENTRE FONCTIONS



UNE SIMPLE FEUILLE DE PAPIER

- On prend une feuille de papier très grande.
- *Quelle épaisseur obtient-on si on la plie 42 fois ?*

Plus que la distance Terre-Lune !

- Distance Terre-Lune : 384 467 km, soit environ $3,8 \times 10^8$ m
- Epaisseur d'une feuille de papier : un peu plus de 10^{-4} m
- $10^{-4} \times \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{42 \text{ fois}} = 10^{-4} \times 2^{42} \approx 4,4 \times 10^8$

- *Et si on la plie 51 fois ?*

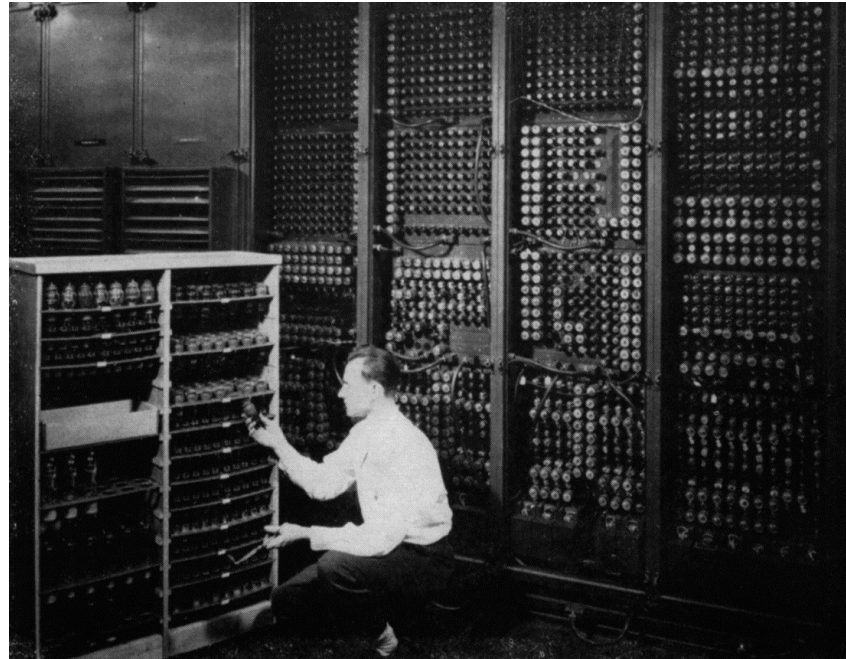
Plus que la distance Terre-Soleil !

- Distance Terre-Soleil : 149 597 870 km, soit environ $1,5 \times 10^{11}$ m
- $10^{-4} \times \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{51 \text{ fois}} = 10^{-4} \times 2^{51} \approx 2,3 \times 10^{11}$

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

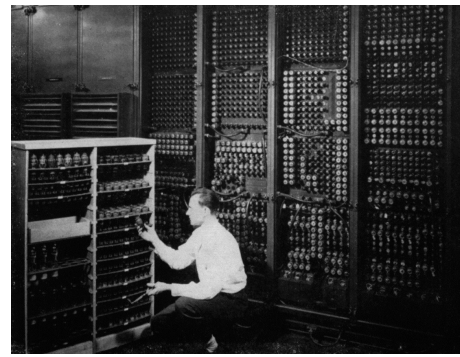
PETIT VOYAGE DANS LE TEMPS

- *Qu'est-ce que c'est ?*



- Le premier ordinateur entièrement électronique
 - Date de présentation au public : 1946
 - *Electronic Numerical Integrator Analyser and Computer (ENIAC)*

PETIT VOYAGE DANS LE TEMPS



- Caractéristiques
 - Dimensions : 2,4 x 0,9 x 30,5 mètres
 - Superficie : 167 m² (presque la taille d'un terrain de tennis)
 - Poids : 30 tonnes
 - Consommation électrique : 150 kilowatts (plusieurs dizaines de foyers)
- Composant principal : le tube à vide
 - Cause la plus fréquente de pannes : les insectes (*bug* en anglais)
 - Plus longue période de calcul sans panne : 116 heures (en 1954)
- Temps de calcul

	Multiplication de nombres à 10 chiffres	Calcul d'une trajectoire de tir
Calcul manuel	Plusieurs minutes	2,6 jours
ENIAC	0,001 s	3 s
Ordinateur de bureau des années 2000	30 ns	36 μ s

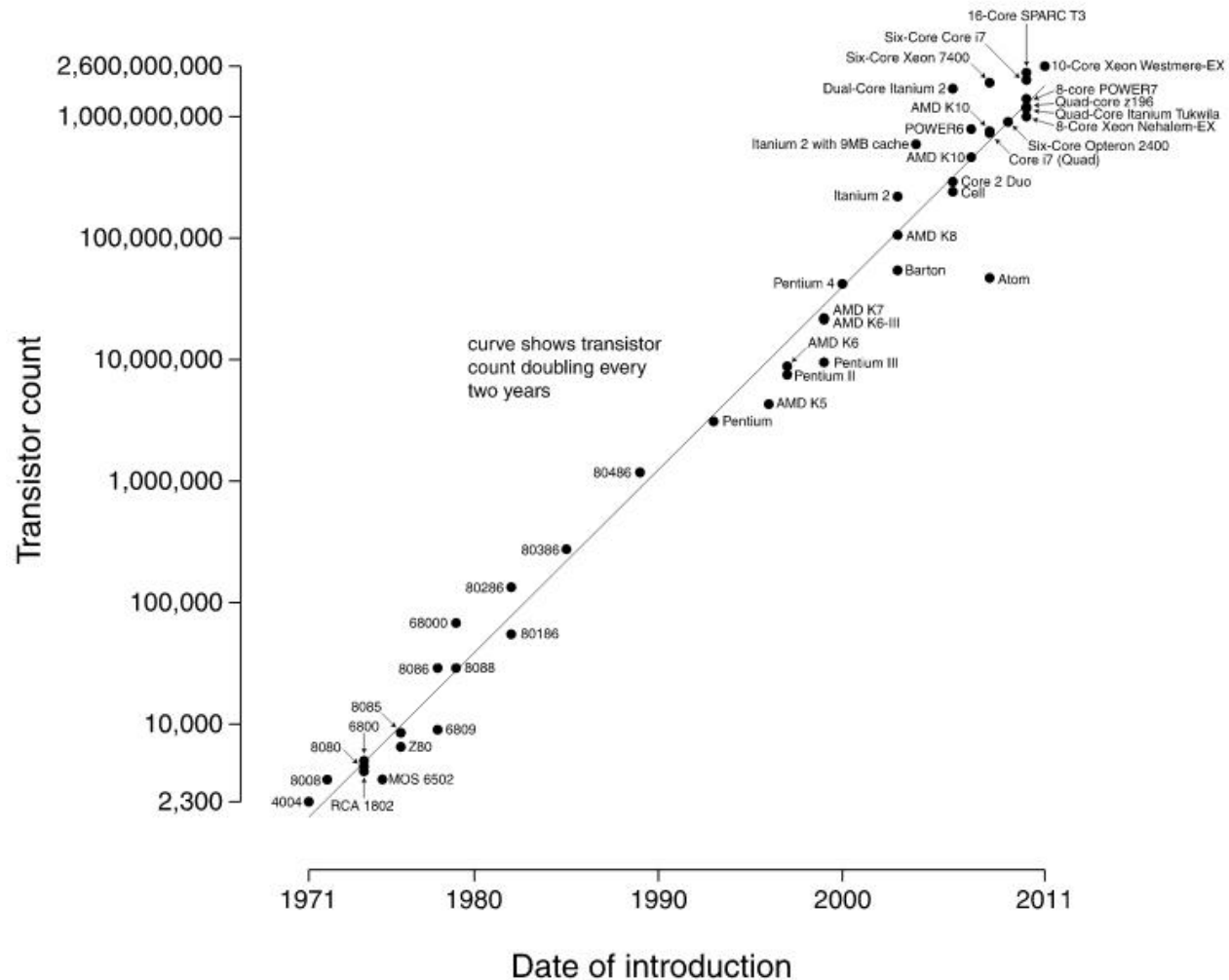
LOIS DE MOORE

- Gordon Earle Moore, un des trois fondateurs d'Intel
- Première loi de Moore (1965)
La complexité des semi-conducteurs proposés en entrée de gamme double tous les ans à cout constant
- Seconde loi de Moore (1975)
Le nombre de transistors des microprocesseurs double tous les deux ans

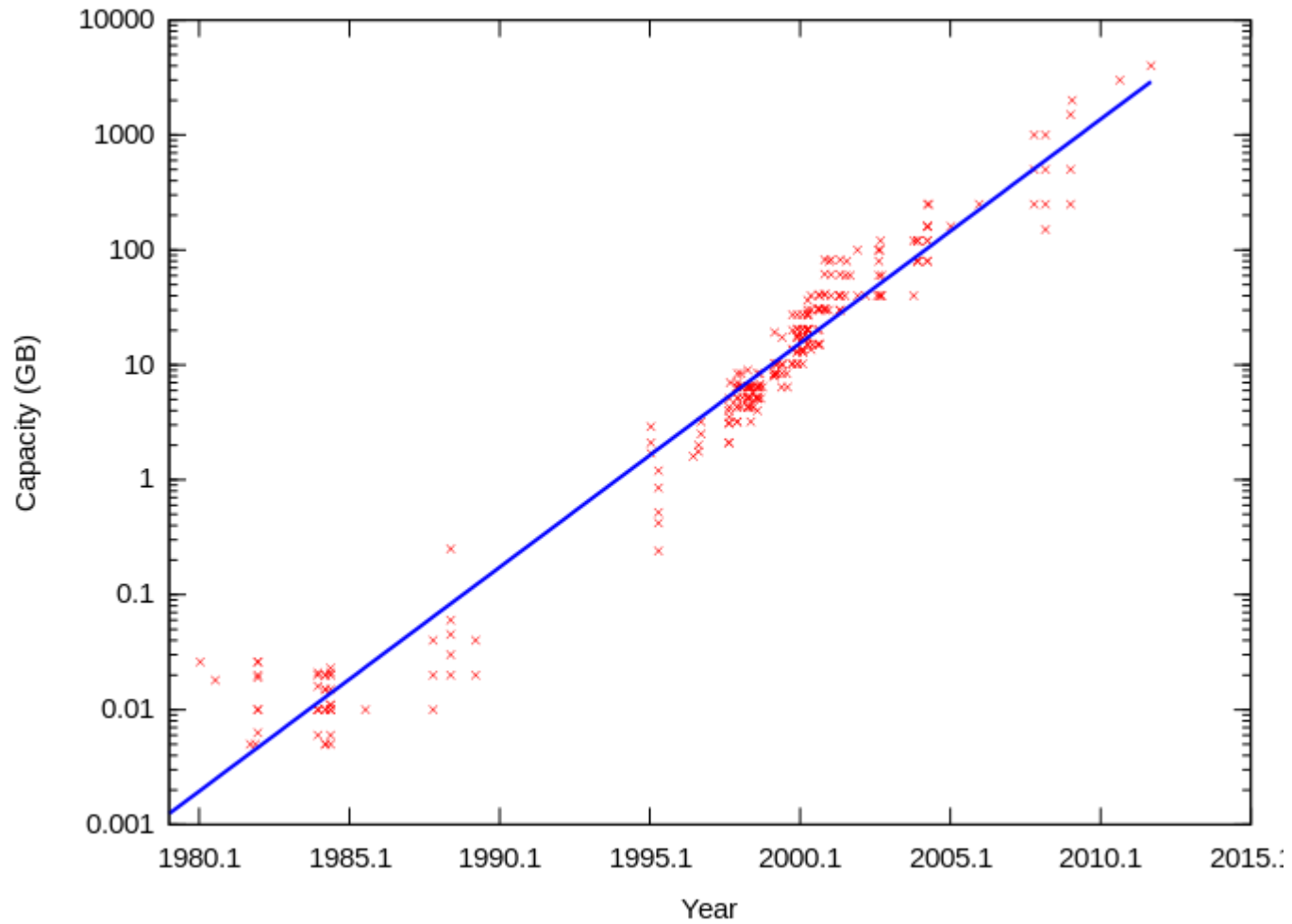


LOIS DE MOORE

Microprocessor Transistor Counts 1971-2011 & Moore's Law

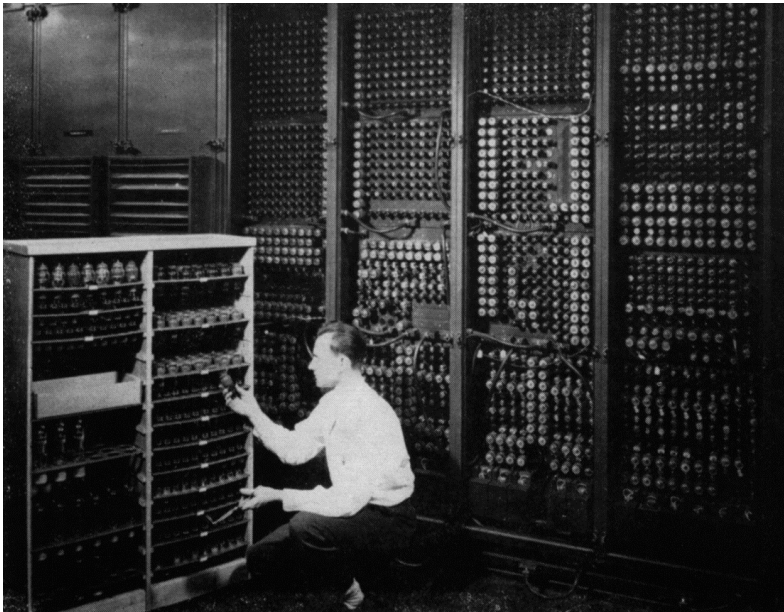


LOIS DE MOORE



LOIS DE MOORE

- **Conséquence** : Compter en combien de temps s'exécute un programme n'a pas vraiment de sens.



LOIS DE MOORE

- **Question :** *Combien aurait coûté un iPhone 5S s'il avait été produit en 1991 ?*
Au moins 3,5 millions de dollars (2,6 millions d'euros)
- Mémoire
 - Cout d'un disque dur d'1 Go en 1991 : 10 000 dollars
 - Cout d'1 Go de mémoire Flash : 45 000 dollars
 - Cout de 32 Go de mémoire Flash : 1,4 millions dollars
- Processeur
 - Cout du millions d'instructions par secondes (MIPS) : 30 dollars
 - MIPS du microprocesseur l'iPhone 5S : 20 000
 - Cout du microprocesseur : 600 000 dollars
- Connectivité et Bande passante
 - Cout pour un kilo-octet par seconde : 100 dollars
 - Capacité d'un iPhone 5S : plus de 15 Mo/s
 - Cout de la connectivité et bande passante : 1,5 millions de dollars
- A l'époque, cette technologie n'aurait pas tenu dans un réfrigérateur



UNE LIMITE DE LA LOI DE MOORE

- En 2016, on est capable de produire des composants de seulement 14 nanomètres, voire un peu moins
- D'ici 2020, on aura peut-être atteint 2 ou 3 nanomètres.
- Il devient difficile de réduire ainsi la taille des transistors :
 - 2 à 3 nanomètres, c'est la taille d'une dizaine d'atomes
 - Cela devient très coûteux
 - On entre alors dans le domaine de la physique quantique
- On est sans doute en train de se heurter à une limite de la loi de Moore, mais d'autres pistes d'innovation existent
 - Des matériaux moins coûteux, plus « propres »
 - D'autres axes de réflexions possibles

RAPIDITÉ D'EXÉCUTION D'UN PROGRAMME

- **Constat** : Compter en combien de temps s'exécute un programme n'a pas vraiment de sens, mais certains programmes sont plus « rapides » que d'autres.

- Voici deux programmes :

```
def prog1():  
    total = 0  
    for i in range(100000000):  
        total = total + 1  
    return total
```

```
def prog2():  
    total = 0  
    for i in range(10):  
        total = total + 1000000  
    return total
```

- Quelque soit la machine utilisée, le second est un million de fois plus rapide que le premier.

DÉFINITION

- La **complexité en temps** d'un programme est
 - Une estimation du temps qu'il met à s'exécuter
 - En fonction de la taille des arguments passés en entrée
 - A une constante près
- La **complexité en mémoire** d'un programme est
 - Une estimation de l'espace dont il a besoin pour s'exécuter
 - En fonction de la taille des arguments passés en entrée
 - A une constante près
- **Remarque** : On se concentrera dans un premier temps sur la complexité en temps.

"EN FONCTION DE LA TAILLE DES ARGUMENTS"

- Exemple

```
def programmeIdiot1(n):  
    x = 1  
    for i in range(n):  
        x = 2  
    return x
```

Linéaire

```
def programmeIdiot2(n):  
    x = 1  
    for i in range(n*n):  
        x = 2  
    return x
```

Quadratique

```
def programmeIdiot3(n):  
    x = 1  
    for i in range(2):  
        x = 2  
    return x
```

Constant

EXÉCUTION EN TEMPS CONSTANT

- On dit qu'une opération s'exécute en **temps constant** quand elle s'exécute toujours dans le même temps, quelque soit la taille de l'entrée :

$$Temps\ de\ calcul(n) \approx Constante$$

- **Remarque** : on considère que la plupart des opérations de base d'un langage de programmation sont en temps constant.
- **Exemples** :
 - Comparer deux nombres
 - Afficher un nombre
 - Récupérer la valeur d'une variable
- **Notation** : $O(1)$

COMPLEXITÉ LINÉAIRE

- On dit qu'un algorithme a une **complexité linéaire** quand il s'exécute dans un temps proportionnel à la taille de l'entrée :

$$\textit{Temps de calcul}(n) \approx \textit{Constante} \times n$$

- Exemples :

- n
- $10000 \times n$
- $\frac{n}{2}$

- Notation : $O(n)$

COMPLEXITÉ QUADRATIQUE

- On dit qu'un algorithme a une **complexité quadratique** quand il s'exécute dans un temps proportionnel au carré de la taille de l'entrée :

$$\textit{Temps de calcul}(n) \approx \textit{Constante} \times n^2$$

- Exemples :

- n^2
- $10 \times n^2$
- $\frac{n^2}{1000000}$

- Notation : $O(n^2)$

COMPLEXITÉ POLYNOMIALE

- On dit qu'un algorithme a une **complexité polynomiale** quand il s'exécute dans un temps proportionnel à une puissance de la taille de l'entrée :

$$Temps\ de\ calcul(n) \approx Constante \times n^k$$

(k ne dépendant pas de n)

- Exemples :

- n^5
- n^2
- n

- Notation : $O(n^k)$

COMPLEXITÉ EXPONENTIELLE

- On dit qu'un algorithme a une **complexité exponentielle** quand il s'exécute dans un temps qui augmente exponentiellement avec la taille de l'entrée, ce qui peut s'écrire :

$$Temps\ de\ calcul(n) \approx Constante \times k^n$$

(k ne dépendant pas de n)

- Exemple :
 - 2^n : le temps de calcul double chaque fois que n augmente de 1
- Notation : $O(2^n)$

COMPLEXITÉ LOGARITHMIQUE

- On dit qu'un algorithme a une **complexité logarithmique** quand il s'exécute dans un temps proportionnel au logarithme de la taille de l'entrée :

$$\textit{Temps de calcul}(n) \approx \textit{Constante} \times \log(n)$$

- Notation : $O(\log(n))$

RAPPEL : TABLEAU DES COMPARAISONS

n	n^2	n^3	n^{10}	2^n	$\log_{10}(n)$
1	1	1	1	2	0
2	4	8	1024	4	0,30103
3	9	27	59049	8	0,47712125
4	16	64	1048576	16	0,60205999
5	25	125	9765625	32	0,69897
10	100	1000	1E+10	1024	1
20	400	8000	1,024E+13	1048576	1,30103
50	2500	125000	9,7656E+16	1,1259E+15	1,69897
100	10000	1000000	1E+20	1,2677E+30	2
500	250000	125000000	9,7656E+26	3,273E+150	2,69897
1000	1000000	1000000000	1E+30	1,072E+301	3

- Meilleure sera la complexité, plus on pourra traiter des entrées de taille importante

EXEMPLES SIMPLES

EXEMPLE 1 : AFFICHER LES NOMBRE DE 1 À n

- **But** : Ecrire un programme qui prend en entrée un entier n , qui affiche la liste des entiers entre 1 et n , et ne renvoie rien.

- **Exemple** :

```
exemple1 (5)
```

1

2

3

4

5

EXEMPLE 1 : AFFICHER LES NOMBRE DE 1 À n

- Code :

```
def exemple1(n):
```

```
    for i in range(1,n+1)    Linéaire
```

```
        print(i)            Constant
```

- Complexité : $O(n)$

EXEMPLE 2 : TABLE DE MULTIPLICATION

- **But** : Ecrire un programme qui prend en entrée un entier n , qui affiche une table de multiplication avec n lignes et n colonnes.

- **Exemple** :

exemple2 (4)

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

EXEMPLE 2 : TABLE DE MULTIPLICATION

- Code :

```
def exemple2(n):
```

```
    for i in range(1, n+1):
```

Quadratique

```
        for j in range(1, n+1):
```

Linéaire

```
            print(i*j, end = "\t")
```

Constant

```
        print()
```

- Complexité : $O(n^2)$

COMPLEXITÉ ET RÉCURSIVITÉ

RAPPEL : FONCTION RÉCURSIVE

- **Définition** : Une fonction récursive est une fonction qui s'appelle elle-même

- **Modèle classique** :

```
def f(n):  
    if (n==0):  
        # Renvoyer une valeur  
    else:  
        resultatAppelRecurusif = f(n-1)  
        g(resultatAppelRecurusif)
```


EXEMPLE SIMPLE : LA FACTORIELLE

- **Définition** : La fonction factorielle est définie par

$$n! = \text{factorielle}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 \times 2 \times \dots \times n & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- **Définition récursive** :

$$n! = \text{factorielle}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \text{factorielle}(n-1) \times n & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- **Remarques** :

- $n!$ est plus rapide que n^k
- $n!$ est plus rapide que 2^n

EXEMPLE SIMPLE : LA FACTORIELLE

- Définition récursive :

$$n! = \text{factorielle}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \text{factorielle}(n-1) \times n & \text{sinon} \end{cases}$$

- En Python :

```
def fact(n):  
    if (n==0):  
        return 1  
    else:  
        return n*fact(n-1)
```

EXEMPLE SIMPLE : LA FACTORIELLE

- En Python :

```
def fact(n):  
    if (n==0):  
        return 1  
    else  
        return n*fact(n-1)
```

- Analyse

- Notons $C(n)$ le nombre d'opération élémentaires effectuées dans le calcul de `fact(n)`
- $C(0) = 2$ (un test et le renvoi d'une valeur)
- Si $n > 0$, $C(n) = 3 + C(n-1)$ (un test, une multiplication, et un renvoi)
- $C(n) = 3 + 3 + C(n-2) = 3 + 3 + \dots + C(0) = 3n + 2$

- Complexité : $O(n)$

EXEMPLE UN PEU MOINS SIMPLE : LA BOULE DE CRISTAL

Rappelez-vous...

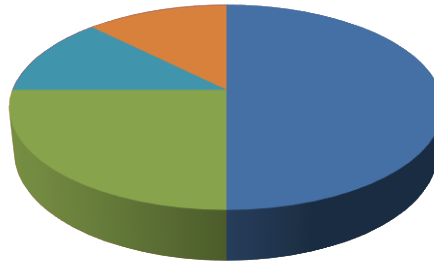
- Donnez moi un chiffre entre 1 et 1 000
- Je vous le retrouve en 10 questions binaires (oui – non)



EXEMPLE UN PEU MOINS SIMPLE : LA BOULE DE CRISTAL

- Principe :

A chaque étape, on divise par deux la taille de l'intervalle de recherche.



Questions posées	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Intervalle	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

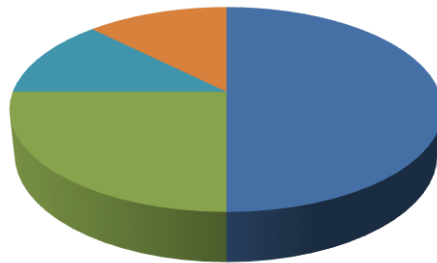
EXEMPLE UN PEU MOINS SIMPLE : LA BOULE DE CRISTAL

- En pseudo-code :

```
TrouverNombreMystere(min, max) =  
    Si (min = max)  
        Alors  
            La réponse est min  
        Sinon  
            milieu = (min+max) / 2  
            Si (nombreMystere ≤ milieu)  
                Alors  
                    TrouverNombreMystere(min, milieu)  
                Sinon  
                    TrouverNombreMystere(milieu+1, max)  
            Fin Si
```

EXEMPLE UN PEU MOINS SIMPLE : LA BOULE DE CRISTAL

- **Question** : Quelle est la complexité de ce programme ?
- **Remarque** : On peut supposer d'abord que n est une puissance de 2 : $n = 2^k$
- **Réponse** : Le temps de calcul est proportionnel à k , et donc à $\log_2(n)$



EXERCICES

RECHERCHE DANS UN VECTEUR

- **Question** : Quelle est la complexité d'un algorithme qui recherche si un élément x appartient à une liste v ?
- **Algorithme** :
- **Remarque** : sauf indication contraire, on s'intéresse toujours à la complexité dans le pire des cas

SUPPRIMER LES DOUBLONS

- **Question** : Quelle est la complexité d'un algorithme :
 - Prenant en argument une liste d'entiers l_1
 - Renvoyant une liste l_2 correspondant à l_1 sans doublons
- **Algorithme** :

LE PLUS LONG PALINDROME

- **Définition** : Un **palindrome** est une chaîne de caractères qu'on peut lire de gauche à droite ou de droite à gauche.
- **Exemples** :
 - "Bob"
 - "Kayak"
 - "La mariée ira mal"
 - "Zeus a été à Suez"
 - "Engage le jeu que je le gagne" (Alain Damasio, la Horde du Contrevent)
- **But** : Ecrire une fonction qui prend en argument une chaîne de caractère et qui renvoie le plus long palindrome qu'elle contient.

TRI PAR SÉLECTION

- Principe

- On trouve le plus grand élément de la liste $l[0 \dots n - 1]$
- On le met dans la dernière case
- On trouve le plus grand élément de la sous-liste $l[0 \dots n - 2]$
- On le met dans l'avant dernière case
- Etc.

- But

- Implémentez cette méthode
- Déduisez-en sa complexité

- Fonction auxiliaire à écrire

- Trouver l'indice du maximum d'un sous-liste

TRI PAR SÉLECTION

- Trouver l'indice du maximum :

- Complexité : $O(n)$

TRI PAR SÉLECTION

- Tri par insertion

- Complexité : $O(n^2)$

TRI À BULLES

- Principe

- On parcourt la liste du début à la fin
- Si on a $l[i] > l[i+1]$, alors on inverse ces deux éléments ($l[i]$ "remonte")
- Si on arrive à la fin de la liste sans qu'il y ait d'échange, c'est que la liste est triée
- Sinon on refait un passage
- Etc.

- But

- Implémentez cette méthode
- Déduisez-en sa complexité



TRI PAR INSERTION

- Aussi appelé « tri du joueur de cartes »
- Principe
 - Le joueur a dans sa main des cartes déjà triées
 - Il reçoit une nouvelle carte
 - Il l'insère au bon endroit dans sa main
 - Il reçoit une nouvelle carte
 - etc.
- But
 - Implémentez cette méthode
 - Déduisez-en sa complexité



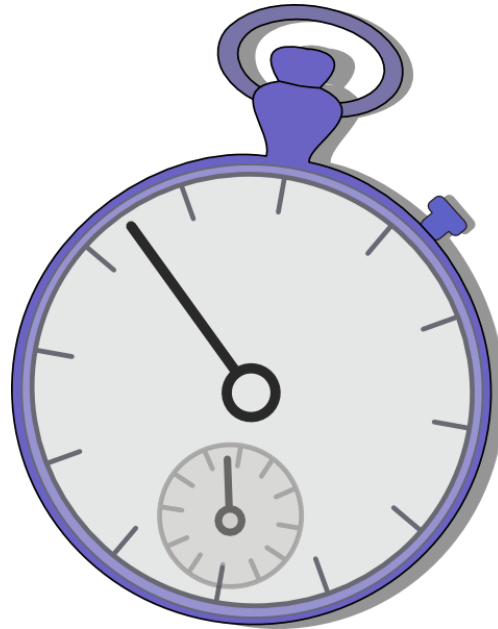
PROCHAINE SÉANCE

Vendredi 8 avril

TRIS ET COMPLEXITÉ

n

n^2



2^n

$n \times \log n$