Langages rationnels

Lundi 2 mars

Option Informatique

Ecole Alsacienne

Avant de commencer…

- TDs à rendre
  - Au moins 3 TD parmi
    - Labyrinthes
    - Labyrinthes parfaits
    - Premières interfaces graphiques
    - Graphes et labyrinthes
  - Au moins une IA pour Trolls & Châteaux

- Fin du deuxième trimestre

- Cours reporté

Plan

1. Motivations
2. Alphabets et langages
3. Expressions rationnelles
4. Automates finis déterministes
5. Automates finis non déterministes

Motivations

Quelques lignes de code

- Que fait le code ci-dessous ?

```
x = 1
for i in range(10):
    x = i + x / 2 + 1
print(x)
```

- Comment en êtes-vous arrivés à ces conclusions ?

```
x = 1
for i in range(10):
    x = i + x * 2 + 1
print(x)
```

Quelques lignes de code

```
x = 1
for i in range(10):
    x = i + x * 2 + 1
print(x)
```

- Ces quelques lignes de codes contiennent beaucoup d'informations :
  - Noms de variables
  - Noms de fonctions
  - Valeurs numériques
  - Déclaration de boucle et corps de boucle
  - Symboles divers (parenthèses, opérateurs, signe d'égalité)
  - Priorité entre opérateurs (le * intervient avant le +)

Quelques lignes de code

```
x = 1
for i in range(10):
    x = i + x * 2 + 1
print(x)
```

- Avec l'habitude, vous déduisez toutes ces informations sans même y penser.

- **Question :** Comment un ordinateur est-il capable d'effectuer cette même analyse ?

Syntax error

- Que fait le code ci-dessous ?

```
x = 1
for i in range(10)
   x = i   x / 2 + 1
      print(i)
print(x))
```

- **Réponse** : Il plante !
  - Il manque un point-virgule après `range(10)`
  - Il manque un symbole entre `i` et `x`
  - L'instruction `print(i)` est mal indentée
  - Il y a une parenthèse en trop sur la dernière ligne

- **Question** : Comment un ordinateur est-il capable d'identifier une erreur de syntaxe ?

Analyse syntaxique

- L'analyse syntaxique consiste à étudier une suite de symboles pour essayer d'en déduire la structure et le sens

- Cette analyse permet en outre de détecter certaines erreurs (ex : symbole oublié)

- **Remarque :** Les erreurs de syntaxe ne sont pas les seules possibles ; même si la syntaxe est valide, un programme ne fait pas forcément ce que l'on croît.

```
x = 1
for i in range(10):
    x = i + x / 2 + 1
    print(x)
```

Liens avec les langages naturels

- La notion d'analyse syntaxique existe également avec les langages naturels.

- Là encore, il s'agit de donner du sens à une suite de symboles.
  - Exemple : *Il y a deux réponses à cette question.*
  - L'esprit tente d'identifier un verbe, un sujet, des compléments, etc.

- Il est également possible de faire des erreurs :
  - Fautes d'orthographe : *Il y a deux réponse à cet question.*
  - Construction incorrecte : *Il y a réponses deux à cette question.*
  - Etc.

Liens avec les langages naturels

- Cette analyse est très complexe pour les langages naturels
  - Un pan entier de la recherche en informatique y est consacré
  - Exemples de thématique :
    - extraction du sens
    - traduction
    - analyse des sentiments

- Mais les difficultés sont nombreuses :
    - Polysémie : *Les poules du couvent couvent.*
    - Négation : *Nul n'est censé ignorer la loi.*
    - Ironie : *Quel splendide temps normand !*
    - Expressions figurées : *Il pleut des cordes.*
    - Fautes d'orthographe : *Je pnese donc je ssuis.*
    - Tournures inattendues : *Toujours par deux ils vont.*
    - Etc.

Recherche de motif

- **Question :** Comment chercher la présence des termes suivants dans un texte ?
  - Mots qui commencent par la lettre A ?
  - Mots de 3 lettres qui comment par la lettre A ?
  - Mots qui commencent par la lettre A et qui se terminent par ENT ?
  - Mots composés d'exactement 5 chiffres ?
  - Mots construits selon le modèle suivant *[nom]@[domaine].[extension]*

Recherche de motif

- Exemples d'utilisation :
  - Rechercher des séquences de nucléotides dans un brin d'ADN (par exemple pour détecter des maladies)
  - Retrouver un code postal dans un gros volume de texte
  - Vérifier qu'une chaîne de caractères entrée par un utilisateur correspond bien à un email
  - Remplacer des centaines d'occurrences d'un seul coup

    Exemple : `EA_`*`prenom_nom`*`.doc` devient `EA_nom_prenom.doc`
  - Etre capable d'exploiter toute la puissance des expressions régulières

Une nouvelle séquence

- Tous ces sujets sont en fait liés à une notion très utile en informatique : les langages rationnels.

- Vous avez peut-être rencontré certains termes qui se rapprochent de cette idée :
  - Langages réguliers
  - Expressions rationnelles
  - Expressions régulières ("regex")
  - Automates finis (déterministes ou non)

- C'est justement le thème de cette nouvelle séquence !

Alphabets et langages

Alphabets

- Il existe de nombreux alphabets :
  - A B C D E
  - α β γ δ ε
  - ا ب ت ث ج
  - 你说汉语吗
  - 
  - etc.

DÉFINITIONS

- Un alphabet est un ensemble fini de symboles
  - Par convention, cet alphabet est souvent noté Σ

- Un mot sur l'alphabet Σ est une suite finie (eventuellement vide) d'éléments de Σ.

- Par convention, le mot vide est noté ε.

- La longueur d'un mot u est notée $|u|$.
  - On a notamment $|\varepsilon| = 0$

Nombre d'occurrences

- Le nombre d'occurrence du symbole a dans le mot u est noté $|u|_a$

- Propriété directe :

$$|u| = \sum_{a \in \Sigma} |u|_a$$

- On note a^n le mot composé de n occurrences du symbole a
  - On a notamment $a^0 = \varepsilon$

- La concaténation des mots u et v est notée uv.

LANGAGES

- L'ensemble de tous les mots formés à partir de l'alphabet Σ est noté $\Sigma^\star$.

- L'ensemble de tous les mots non vides formés à partir de l'alphabet Σ est noté Σ^+.

- Un langage sur l'alphabet Σ est un sous-ensemble de $\Sigma^\star$
  - Par convention, un langage est souvent noté L, ou L_1, etc.

Premiers exemples de langages

- Considérons l'alphabet $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$.

- Les exemples ci-dessous sont tous des langages sur cet alphabet Σ :
  - $\Sigma^\star$: Tous les mots composés des lettres a ou b (y compris le mot vide)
  - $L_1 = \{aa, ab, ba, bb\}$: Tous les mots de longueur 2
  - $L_2 = \{ab, aab, abb, aaab, \ldots\}$: Tous les mots qui commencent par a et qui se terminent par b
  - $L_3 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$: Tous les mots composés d'une succession de a puis du même nombre de b
  - $L_4 = \{(aa)^n \mid n \geq 0\}$: Tous les mots composés d'un nombre pair de a (ce qui inclut le mot vide)

Des possibilités infinies

- Un alphabet est un ensemble fini de symboles

- Pourtant,
  - Il existe une infinité de mots pour un alphabet donné
  - Il existe une infinité de langages sur un alphabet donné

- Un langage fini est un langage qui contient un nombre fini de mots
  - Exemple : $L_1 = \{aa, ab, ba, bb\}$: Tous les mots de longueur 2
  - En général, les langages étudiés contiennent un nombre infini de mots

Opérations ensemblistes

- L'union de deux langages L_1 et L_2 est le langage constitué des mots appartenant à L_1 ou à L_2
  - C'est un "OU" non exclusif
  - Cette union est souvent notée $L_1 \cup L_2$

- L'intersection de deux langages L_1 et L_2 est le langage constitué des mots appartenant à la fois à L_1 et à L_2
  - Cette intersection est souvent notée $L_1 \cap L_2$

- Le complémentaire (dans $\Sigma^\star$) d'un langage L est le langage constitué de l'ensemble des mots n'appartenant pas à L.
  - Ce complémentaire est souvent noté $\overline{L}$

Opérations ensemblistes

- Pour tout langage L sur $\Sigma^\star$, on a
  - $\bar{L} \cup L = \Sigma^\star$
  - $\bar{L} \cap L = \emptyset$ (ensemble vide)

- La concaténation de deux langages L_1 et L_2 est le langage constitué des mots formés d'un mot de L_1 suivi d'un mot de L_2
  - Cette concaténation est souvent notée$L_1 L_2 L_2$
  - Formellement, $L_1 L_2 = \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}$

Opérations ensemblistes

- Si L est un langage, le langage L^n est le langage constitué des mots formés de n mots de L
  - Formellement, $L^n = \{u = u_1 u_2 \cdots u_n \mid u_1 \in L, u_2 \in L, \cdots, u_n \in L\}$
  - On a notamment $L^0 = \{\varepsilon\}$
  - A ne pas confondre avec le langage $\{u = v^n \mid v \in L\}$ (qui ne contient que les puissances n^ièmes^ des mots de L)

- L'étoile (aussi appelée *fermeture de Kleene*) d'un langage L est notée $L^\star$, et est définie par

$$L^\star = \bigcup_{i \geq 0} L^i$$

  - $L^\star$ contient donc tous les mots qu'il est possible de construire en concaténant un nombre fini de mots de L.

Expressions rationnelles

DÉFINITION RÉCURSIVE

- Les expressions rationnelles sur un alphabet Σ sont définies de la façon suivante :
  - L'ensemble vide $\emptyset$ est une expression rationnelle
  - Le mot vide ε est une expression rationnelle
  - Pour tout symbole $a \in \Sigma$, a est une expression rationnelle
  - Si e_1 et e_2 sont des expressions rationnelles,
    - L'union $e_1 + e_2$ est une expression rationnelle
    - La concaténation $e_1 e_1$ est une expression rationnelle
    - L'étoile $e_1{}^\star$ est une expression rationnelle

- Remarques :
  - C'est une définition récursive
  - A chaque expression régulière peut être associé un langage

Premier exemple

- Alphabet : $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{f}, \mathrm{i}, \mathrm{r}\}$.

- Les exemples ci-dessous sont autant d'expressions rationnelles :
  - a, e, f, i, r : langages constitués d'un seul symbole
  - (fa) : langage constitué du mot fa, concaténation de f et a
  - $(((fa)i)r)e)$: langage constitué du mot $faire$
  - (re) : langage constitué du mot re
  - $(re)^\star$: langage constitué des concaténations d'un nombre fini de mots de (re)
    - C'est-à-dire ε, re, $rere$, $rerere$, etc.
  - $(re)^\star(((fa)i)r)e)$: langage constitué d'un certain nombre d'occurrence du préfixe re, suivi du mot $faire$
    - C'est-à-dire $faire$, $refaire$, $rerefaire$, $rererefaire$, etc.

Convention d'écriture

- Dans un souci de lisibilité, on utilise souvent les conventions suivantes :
  - L'étoile ($\star$) est prioritaire sur tous les autres opérateurs
  - La concaténation ($\cdot$) est prioritaire sur l'union ($+$)

- Cela permet de supprimer de nombreuses parenthèses pour alléger la lecture
  - $(re)^\star(\left(\left((fa)i\right)r\right)e)$ devient $(re)^\star faire$
  - $\left(\left((ba)(a)^\star\right)(b)^\star\right)b$ devient $baa^\star b^\star b$
  - etc.

Expressions et langages

- **Question** : Quels sont les langages représentés par les expressions rationnelles ci-dessous :
  - $a(a+b)^\star b$
  - $a(a^\star b^\star)^\star b$
  - $a(a^\star b)^\star a^\star b$

- Deux expressions peuvent représenter le même langage !

- Il est parfois possible de simplifier une expression rationnelle

  Si $\boldsymbol{e}$ est une expression rationnelle,
  - $e + e = e$
  - $(e^\star)^\star = e^\star$
  - etc.

EXERCICES

- **Exercice 1** : A quoi correspondent les expressions rationnelles suivantes sur l'alphabet $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$.
  1. $a(a + b + c)^\star$
  2. $(a + bb + c)^\star$
  3. $(a + b + c)(a + b + c)$

- **Exercice 2** : Peut-on trouver une expression rationnelle pour décrire les langages suivants ?
  1. Mots qui ne commencent pas par a
  2. Mots qui contiennent un nombre impair de c
  3. Mots qui contiennent exactement 3 a
  4. Mots qui contiennent autant de b que de c

Expressions régulières

- On parle également souvent d'expressions régulières.

- Ces expressions ressemblent aux expressions rationnelles, avec plusieurs symboles supplémentaires :
  - `^` début de ligne
  - `$` fin de ligne
  - `\d` n'importe quel chiffre
  - `\D` n'importe quel caractère autre qu'un chiffre
  - `\w` n'importe quel caractère alphabétique (lettre, chiffre, underscore)
  - `c{n}` le caractère `c` exactement `n` fois
  - etc.

Expressions régulières

- Ces expressions régulières incluent également la notion de "regroupement".

- On peut ainsi
  - "Capturer" une partie d'un motif
  - Vérifier qu'un même sous-motif apparaît plusieurs fois (répétition)
  - Vérifier qu'un sous-motif n'apparaît pas
  - etc.

- Les expressions régulières sont un outil extrêmement puissant
  - Elles permettent de faire efficacement de nombreux traitements
  - Au point qu'elles sont parfois considérées comme une science à part entière !

Expressions régulières - Exemples

- Code postal français
  - 5 caractères de type "chiffre"
  - Expression régulière : `\d{5}`

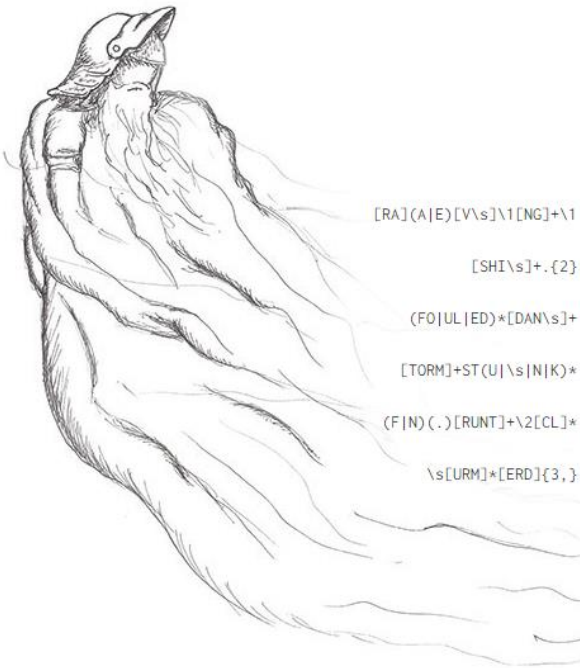
- Email correctement formaté
  - Format attendu `email@domaine.ext`
  - Expression régulière : `\w+@\w+\.\w+`
  - Vraie expression régulière (RFC 822)

```
(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:(?:(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t]
)+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|"(?:[^\"\r\x]|\\.|(?:(?:\r\n)?[ \t]))*"(?:(?:
\r\n)?[ \t])*)(?:\.(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(
?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|"(?:[^\"\r\x]|\\.|(?:(?:\r\n)?[
\t]))*"(?:(?:\r\n)?[ \t]))*@(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\0
31]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\
](?:(?:\r\n)?[ \t])*)(?:\.(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+
(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:
(?:\r\n)?[ \t]))*"|(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z
|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|"(?:[^\"\r\x]|\\.|(?:(?:\r\n)?[ \t]))*"(?:(?:\r\n)
?[ \t])*)*\<(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:@(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\
r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[
 \t])*)(?:\.(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)
?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t]
)*))*(?:,@(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[
 \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t])*
)(?:\.(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t]
)+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t])*))*)
*:(?:(?:\r\n)?[ \t])*)?(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+
|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|"(?:[^\"\r\x]|\\.|(?:(?:\r\n)?[ \t]))*"(?:(?:\r
\n)?[ \t])*)(?:\.(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:
\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|"(?:[^\"\r\x]|\\.|(?:(?:\r\n)?[ \t
]))*"(?:(?:\r\n)?[ \t]))*)*@(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031
]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](
?:(?:\r\n)?[ \t])*)(?:\.(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?
:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?
:\r\n)?[ \t]))*)*\>(?:(?:\r\n)?[ \t])*)|(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?
:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|"(?:[^\"\r\x]|\\.|(?:(?:\r\n)?
[ \t]))*"(?:(?:\r\n)?[ \t])*)*:(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:(?:(?:[^()<>@,;:\\".\[\]
\000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|"(?:[^\"\r\x]|
\\.|(?:(?:\r\n)?[ \t]))*"(?:(?:\r\n)?[ \t])*)(?:\.(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>
@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|"
(?:[^\"\r\x]|\\.|(?:(?:\r\n)?[ \t]))*"(?:(?:\r\n)?[ \t])*))*@(?:(?:\r\n)?[ \t]
)*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\
".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t])*)(?:\.(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?
:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[
\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t])*))*|(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-
\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|"(?:[^\"\r\x]|\\.|(
?:(?:\r\n)?[ \t]))*"(?:(?:\r\n)?[ \t])*)*\<(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:@(?:[^()<>@,;
;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([
^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t])*)(?:\.(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\"
.\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\
]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t])*))*(?:,@(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".
[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\
r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t])*)(?:\.(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\]
\000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]
|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t]))*)*:(?:(?:\r\n)?[ \t])*)?(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \0
00-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|"(?:[^\"\r\x]|\\
.|(?:(?:\r\n)?[ \t]))*"(?:(?:\r\n)?[ \t])*)(?:\.(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,
;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|"(?
:[^\"\r\x]|\\.|(?:(?:\r\n)?[ \t]))*"(?:(?:\r\n)?[ \t])*))*@(?:(?:\r\n)?[ \t])*
(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".
\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t])*)(?:\.(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[
^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]
]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t])*))*\>(?:(?:\r\n)?[ \t])*)(?:,\s*(
?:(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\
".\[\]]))|"(?:[^\"\r\x]|\\.|(?:(?:\r\n)?[ \t]))*"(?:(?:\r\n)?[ \t])*)(?:\.(?:(
?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[
\["()<>@,;:\\".\[\]]))|"(?:[^\"\r\x]|\\.|(?:(?:\r\n)?[ \t]))*"(?:(?:\r\n)?[ \t
])*)*@(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t
])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t])*)(?
:\.(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|
\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t]))*)*|(?:
[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[
]]))|"(?:[^\"\r\x]|\\.|(?:(?:\r\n)?[ \t]))*"(?:(?:\r\n)?[ \t])*)*\<(?:(?:\r\n)
?[ \t])*(?:@(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["
()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t])*)(?:\.(?:(?:\r\n)
?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>
@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t])*))*(?:,@(?:(?:\r\n)?[
 \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,
;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t])*)(?:\.(?:(?:\r\n)?[ \t]
)*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\
".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t])*))*:(?:(?:\r\n)?[ \t])*)?
(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".
\[\]]))|"(?:[^\"\r\x]|\\.|(?:(?:\r\n)?[ \t]))*"(?:(?:\r\n)?[ \t])*)(?:\.(?:(?:
\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z|(?=[\[
"()<>@,;:\\".\[\]]))|"(?:[^\"\r\x]|\\.|(?:(?:\r\n)?[ \t]))*"(?:(?:\r\n)?[ \t])
*))*@(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])
+|\Z|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t])*)(?:\
.(?:(?:\r\n)?[ \t])*(?:[^()<>@,;:\\".\[\] \000-\031]+(?:(?:(?:\r\n)?[ \t])+|\Z
|(?=[\["()<>@,;:\\".\[\]]))|\[([^\[\]\r\\]|\\.)*\](?:(?:\r\n)?[ \t]))*)*\>(?:(
?:\r\n)?[ \t])*)*)?;\s*)
```

Regex crosswords

	[^SPEAK]+	EP|IP|EF
HE|LL|O+		
[PLEASE]+		

	(MA|LM)	[^MESH]+	
[LINE]+			[ISLE]+
[LAM]+			[MALE]+
	[LAME]*	[^LES]+	



	[RO\s]*(N|U|M|\s){3,}	(N|I|E)[HOLE]{2,}A(M|N)	[VIT]{2}[T\s]?(STU|PLO)+	(E|\s)(A|S|K)*.U?[FR]	(F|A|N)(\s)\1\2[RIF](K|D)+	(G|A|\s)(DU|F|SET)+[WAE]+	[ASK]?(LR|EO|\sN)+
[RA](A|E)[V\s]\1[NG]+\1							
[SHI\s]+.{2}							
(FO|UL|ED)*[DAN\s]+							
[TORM]+ST(U|\s|N|K)*							
(F|N)(.)[RUNT]+\2[CL]*							
\s[URM]*[ERD]{3,}							

http://regexcrossword.com/

Automates finis déterministes

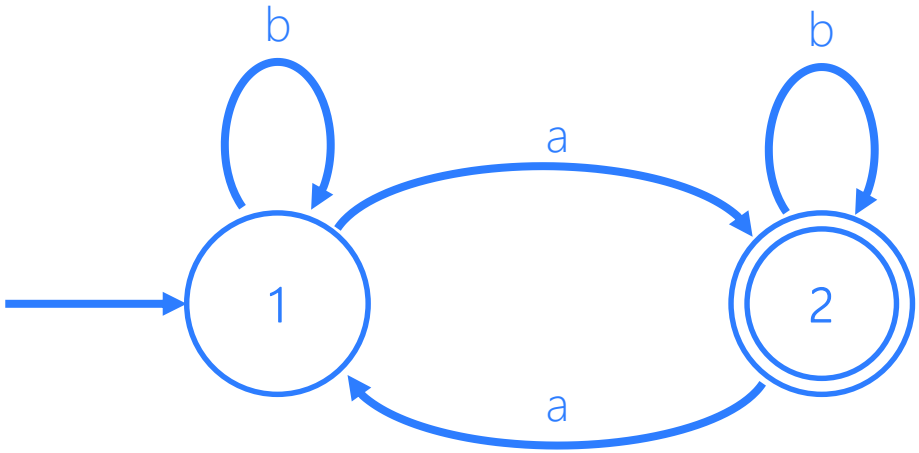
Définition formelle

- Un automate fini déterministe est défini par le quintuplet $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$
  - Σ est l'alphabet (ensemble fini de symboles)
  - Q est un ensemble fini d'états
  - $q_0 \in Q$ est l'état initial
  - $F \subset Q$ est l'ensemble des états finaux
  - δ est une fonction de $Q \times \Sigma$ dans Q, appelée fonction de transition

- Moins formellement,
  - On a plusieurs états possibles
  - On passe d'un état à un autre grâce à un symbole
  - On va chercher à partir de l'état initial pour arriver dans un état final

Représentation graphique

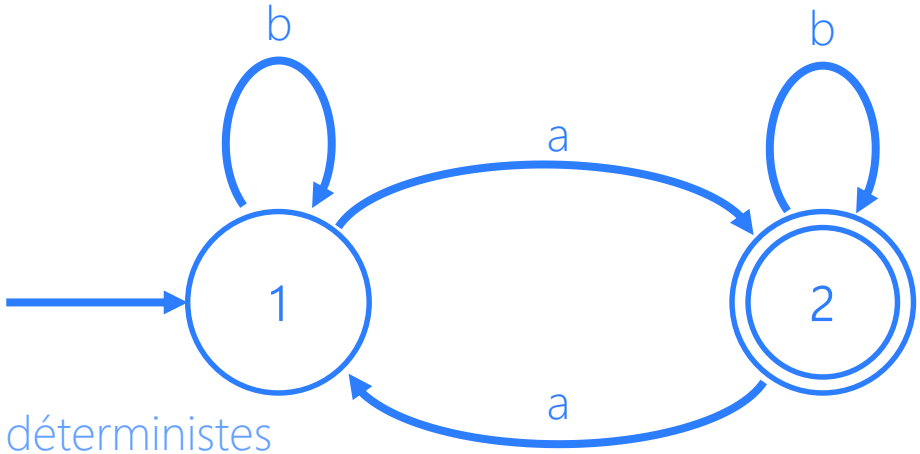
- Un automate est généralement représenté de la façon suivante
  - Les états sont représentés par des ronds
  - L'état initial est pointé par une flèche
  - Les états finaux ont un double contour
  - La fonction de transition est indiquée par des flèches
  - Ces flèches sont étiquetées par les symboles de l'alphabet



Mot reconnu par un automate

- On dit qu'un automate $\mathcal{A}$ reconnait le mot u si et seulement si :
  - En partant de l'état initial q_0
  - On épèle un-à-un les symboles qui composent u (dans l'ordre)
  - Pour chaque symbole, on suit la transition correspondante (on change généralement d'état)
  - On arrive dans l'un des états finaux

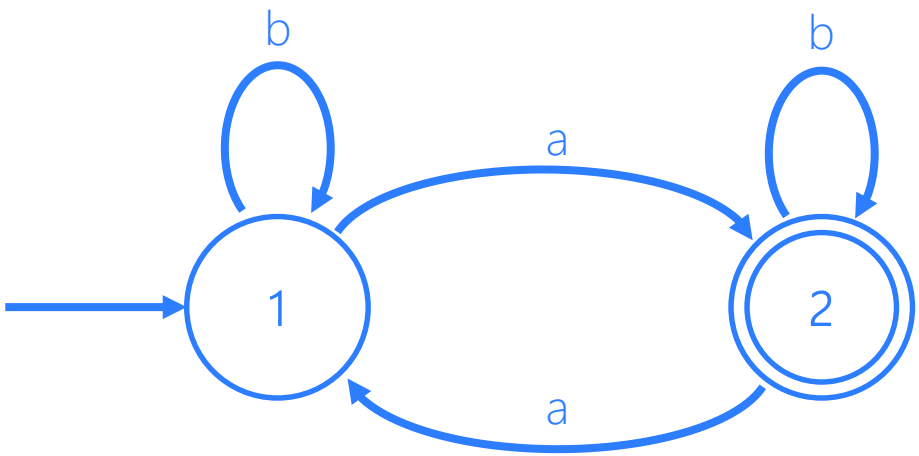
- Remarque : On parle de calcul réussi.



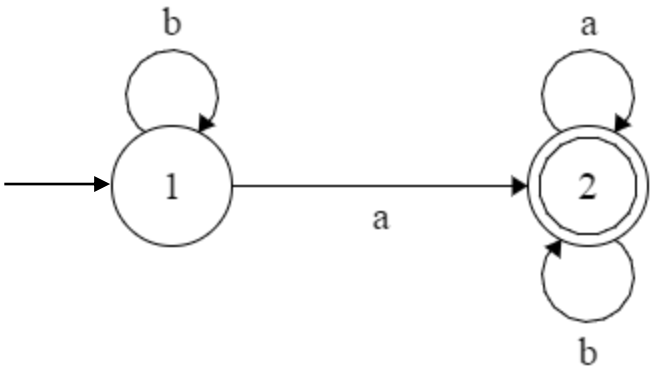
Langages reconnaissables

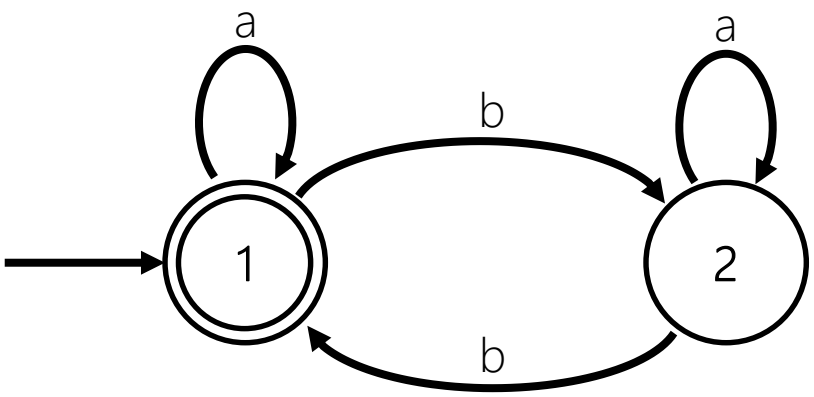
- On dit qu'un automate $\mathcal{A}$ reconnait le langage L si et seulement si :
  - L'automate $\mathcal{A}$ reconnait tous les mots qui appartiennent au langage L
  - L'automate $\mathcal{A}$ ne reconnait pas les mots qui n'appartient pas au langage L

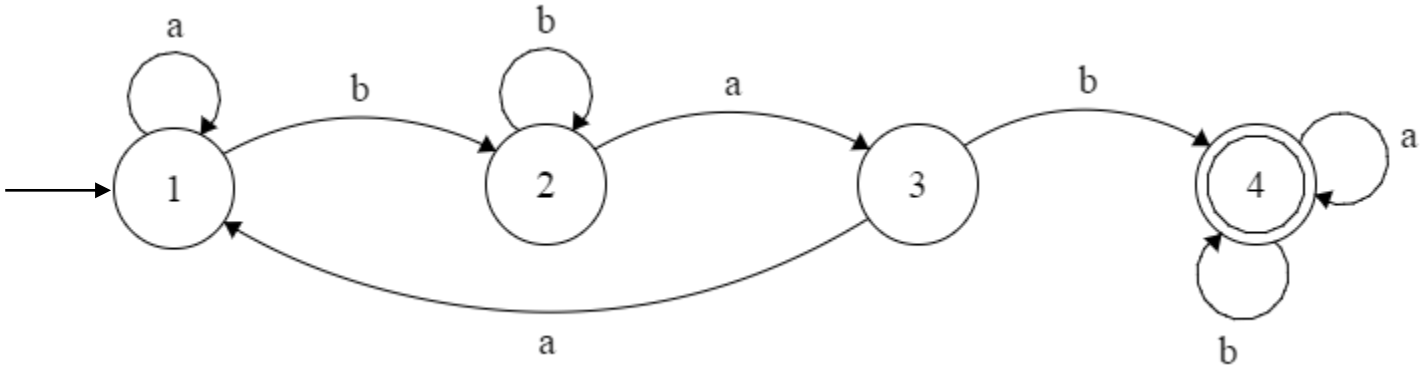
- Un tel langage est appelé reconnaissable.



Que reconnait cet automate ?







A VOUS DE JOUER !

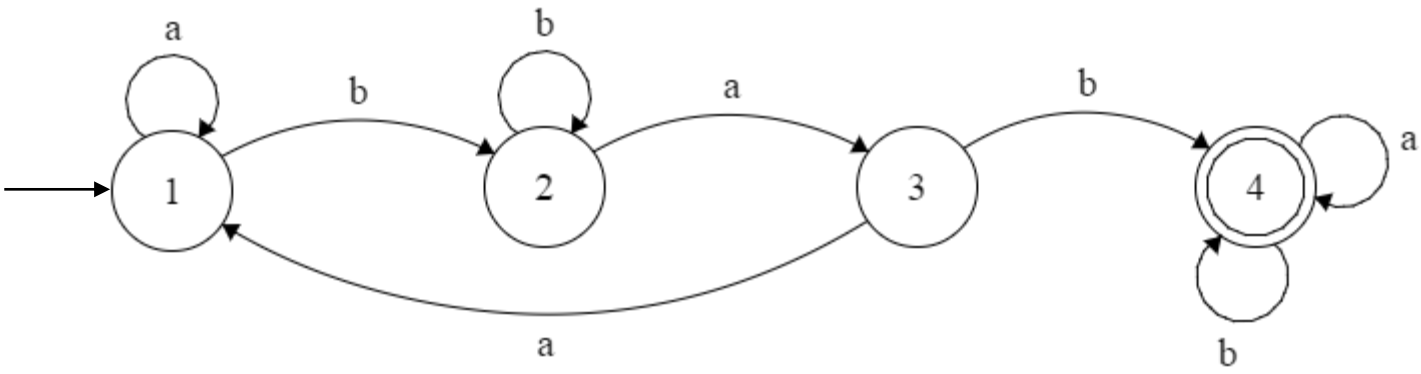
- **Exercice 1** : Dessiner les automates finis déterministes sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ reconnaissant les langages suivants :
  1. Mots qui ne commencent pas par a
  2. Mots qui contiennent un nombre impair de b
  3. Mots qui contiennent exactement 3 a

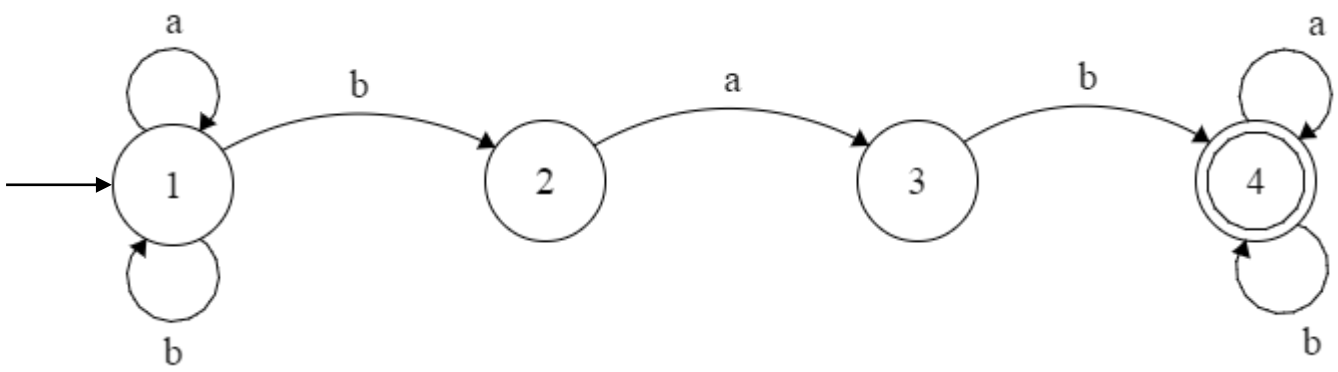
- **Exercice 2** : Dessiner les automates finis déterministes sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ reconnaissant les langages suivants :
  1. Mots qui contiennent le séquence cba
  2. Mots qui contiennent au moins un a, un b, et un c

- **Exercice 3** : Peut-on dessiner un automate sur $\Sigma = \{a, b\}$ qui reconnait les mots contenant autant de a que de b ?

Automates finis non déterministes

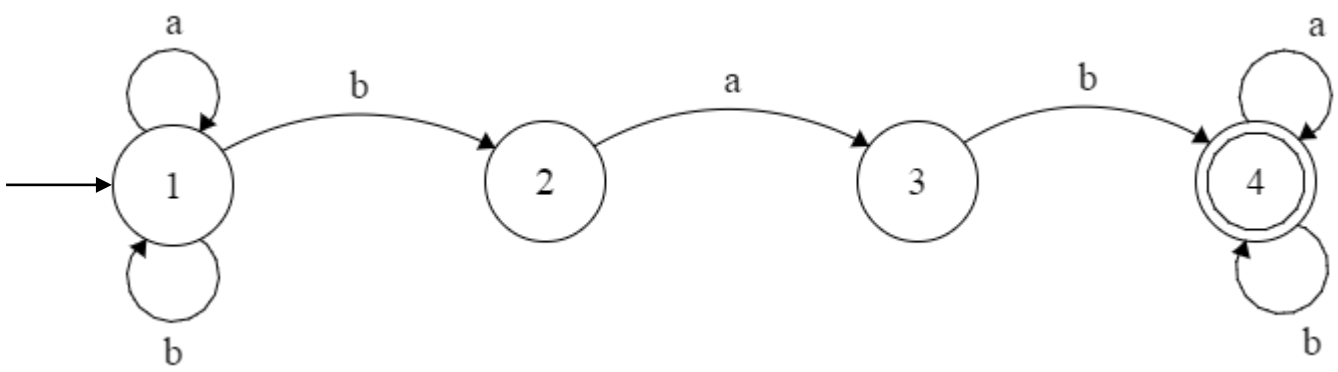
Tentative de simplification





DÉFINITION

- Un automate fini non-déterministe est défini par le quintuplet $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$
  - Σ est l'alphabet (ensemble fini de symboles)
  - Q est un ensemble fini d'états
  - $I \subset Q$est l'ensemble des états initiaux
  - $F \subset Q$ est l'ensemble des états finaux
  - $\delta \subset Q \times \Sigma \times Q$ est une relation ; chaque triplet de δ est une transition



Déterministes et non-déterministes

- En anglais, on parle de
  - DFA : *deterministic finite automaton*
  - NFA : *nondeterministic finite automaton*

- La différence entre les automates déterministes et les automates non-déterministes est la notion de choix.

- Etat initial
  - DFA : Un seul état initial
  - NFA : Choix parmi plusieurs états initiaux possibles

- Transitions
  - DFA : Pour un état de départ et un symbole donnés, il n'y a toujours exactement un état de destination
  - NFA : Pour un état de départ et un symbole données, il peut exister plusieurs choix possibles pour l'état de destination

EXERCICE

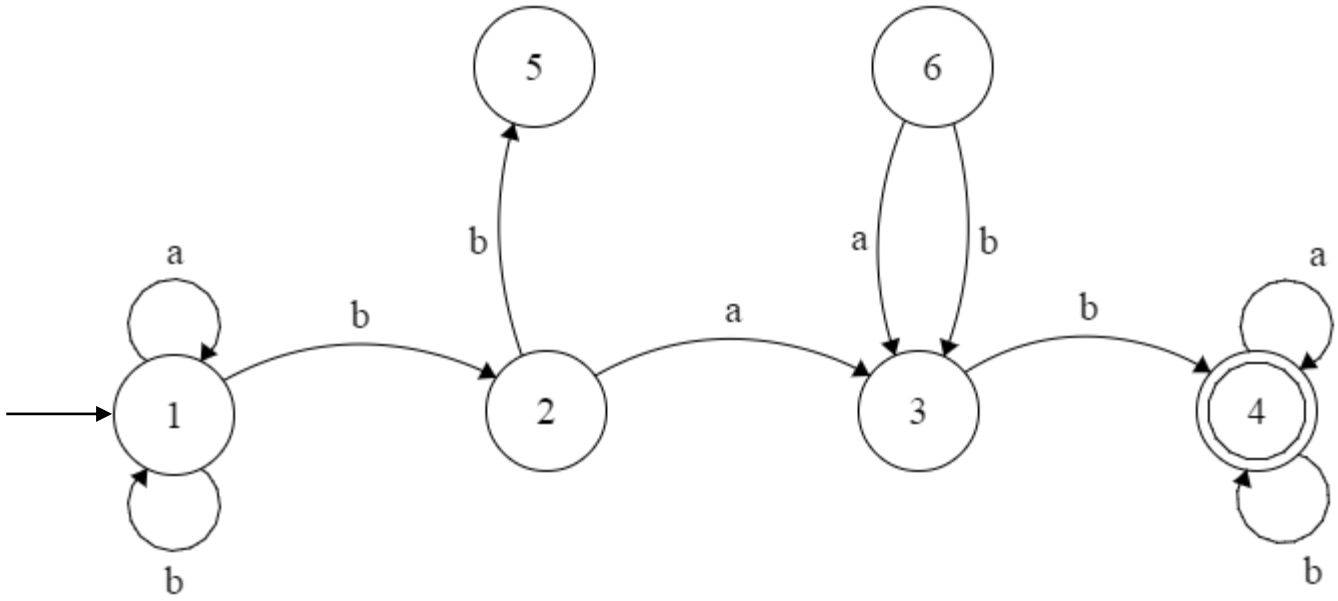
- **Exercice :** Dessiner un automate fini non-déterministe sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ reconnaissant le langage suivant :

  1. Mots qui se terminent par b
  2. Mots qui contiennent exactement 3 a
  3. Mots qui contiennent le séquence cba
  4. Mots de longueur 2 ou plus, qui commencent et se terminent par la même lettre

Etats accessibles et co-accessibles

- Un état q est dit accessible s'il existe un chemin depuis un état initial vers cet état q.

- Un état q est dit co-accessible s'il existe à partir de cet état q vers un état final.

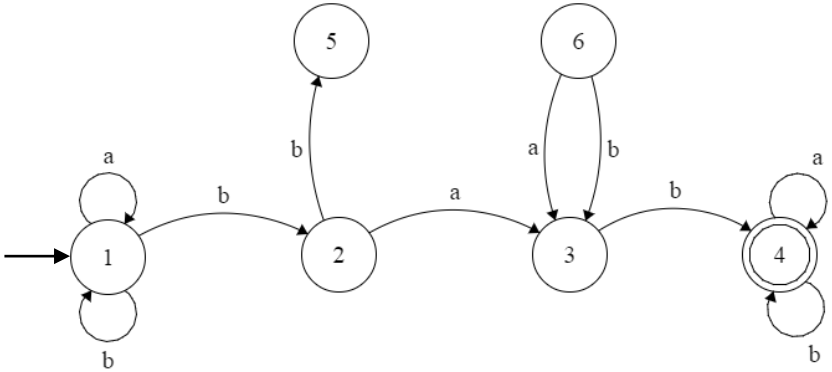


AUTOMATES ÉMONDÉS

- Un état q est dit utile s'il est à la fois accessible et co-accessible.

- Un automate dont tous les états sont utiles est dit émondé.

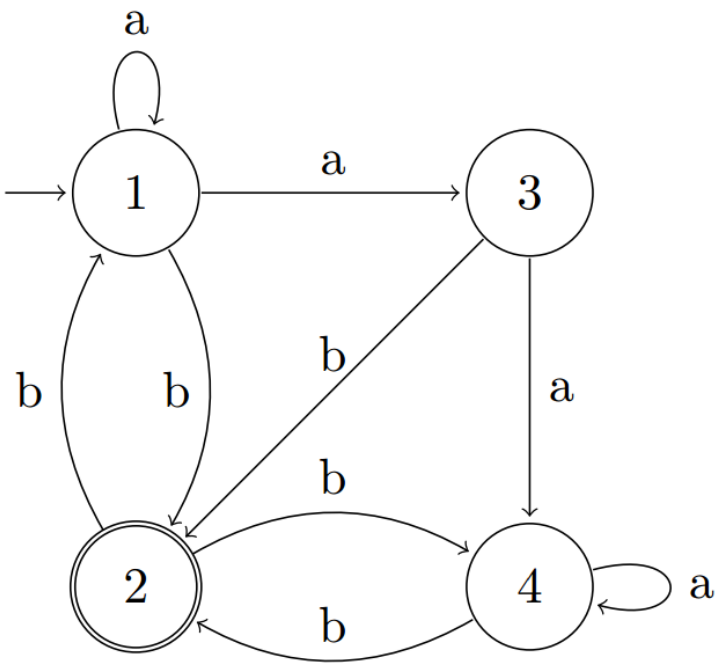
- **Théorème :** Pour tout automate fini $\mathcal{A}_1$ (déterministe ou non), il existe un automate fini émonde $\mathcal{A}_2$ reconnaissant exactement le même langage



EQUIVALENCE

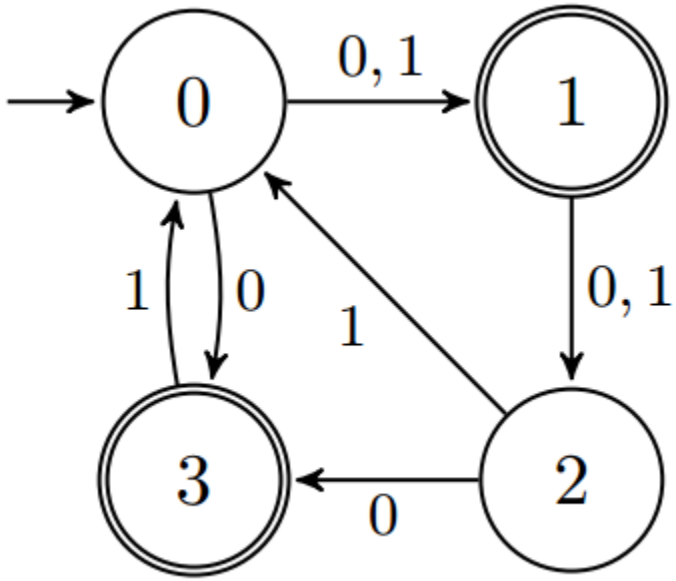
- **Théorème :** Pour tout automate fini non-déterministe $\mathcal{A}_N$, il existe un automate fini déterministe $\mathcal{A}_D$ reconnaissant exactement le même langage.

- On utilise dans la preuve la notion d' "automate des états"



EXERCICE : "DÉTERMINISATION"

- **Exercice :** Dessiner un automate fini déterministe reconnaissant le même langage que l'automate suivant :



Prochaine séance

Lundi 9 mars

Minimisation d'automates